

Численные методы, осень 2022

Задание 3 [Проекторы. Задача наименьших квадратов. QR-разложение.]

Всего баллов: 47 Срок сдачи: 4 ноября

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Лекции 6–8, 10–11 из [1]
- Лекция 8 из [2]

УПРАЖНЕНИЯ

1. (3) Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Получите ортогональные проекторы на пространства $\text{colsp}(A)$ и $\text{colsp}(B)$.
 - Вычислите (вручную) QR-разложения матриц A and B .
2. (5) Частица единичной массы в начальный момент времени покоится в точке $x = 0$. Затем она подвергается воздействию кусочно-постоянной внешней силы f_i ($i = 1 \dots 10$). Пусть $a = (x, v)|_{t=10}$ — вектор, состоящий из координаты и скорости частицы в конечный момент времени. Найдите матрицу A такую, что $a = Af$. Заметьте, что она будет иметь размер 2×10 . С помощью SVD-разложения численно найдите вектор f наименьшей нормы, при котором $a = (1, 0)$.
3. (5) Создайте датасет следующим образом: выберите $n = 7$ точек x_i из равномерного распределения на отрезке $[0, 6]$. Затем вычислите $y_i = f(x_i) + \epsilon_i$, где $f(x) = 10 \sin(x)$, а ϵ_i — независимые стандартные нормальные случайные величины. Изобразите на одном графике точки датасета и функцию f .

Аппроксимируйте датасет с помощью линейной $l(x) = w_0 + w_1x$ и кубической $c(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3$ функций. Изобразите на одном графике получившиеся функции и исходный датасет.

4. (7) Загрузите [файл](#) с матрицами A и C (изображение и фильтр). Откройте его:

```
with np.load('data.npz') as data:
    A, C = data['A'], data['C']
```

Матрицу A полезно преобразовать в вектор a :

```
def mat2vec(A):
    A = np.flipud(A)
    a = np.reshape(A, np.prod(A.shape))
    return a
```

Обратное преобразование из вектора a в матрицу A :

```
def vec2mat(a, shape):
    A = np.reshape(a, shape)
    A = np.flipud(A)
    return A
```

Изображение, хранящееся в матрице A , было получено из исходного изображения A_0 с помощью свёртки с фильтром C и добавления шума. Записывая матрицы как векторы описанным выше способом, мы можем написать

$$a_0 \rightarrow a = Ca_0 + \epsilon,$$

где ϵ — вектор из независимых одинаково распределённых гауссовских случайных величин. Фильтр C размывает изображение, увеличивая при этом его размер с 16×51 до 25×60 . Вашей задачей будет восстановить исходное изображение A_0 по размытому изображению A и фильтру C .

- Постройте изображение A .
- Исследуйте, как фильтр C меняет изображения.
- Наивный способ восстановить A_0 — это найти a_0 из системы $a = Ca_0$. Является ли эта система недо- или переопределённой? Вычислите a_0 с помощью сингулярного разложения матрицы C и постройте получившееся изображение.
- Чтобы улучшить результат, попробуйте использовать только часть сингулярных чисел матрицы C . Выберите наиболее удачное количество.

5. (7) Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min_x \|Ax - b\| \quad \text{при условии} \quad Cx = 0$$

Предполагая, что матрица $A^T A$ обратима, воспользуйтесь методом множителей Лагранжа и получите выражение для точки минимума x .

6. (20) Эта задача посвящена локализации точек на плоскости. Рассмотрим n точек с *неточными* координатами: $A_i = (x_i, y_i)$. Измерим m углов между некоторыми из них: $\theta_{ijk} = \angle A_i A_j A_k$. Наша цель — используя результаты измерений, уточнить координаты точек.

В качестве примера рассмотрим $n = 3$ точки с приближенными координатами: $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (-1, 0)$, $A_3 = (0, 1)$ — и один измеренный угол $\theta_{123} = 9\pi/40$. Так как наши оценки координат не согласуются с измеренным углом, мы должны их скорректировать:

$$x_i \rightarrow x_i + dx_i, \quad y_i \rightarrow y_i + dy_i,$$

где dx_i и dy_i находятся из условия

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_3 A_2} = |A_1 A_2| \cdot |A_3 A_2| \cdot \cos(\theta_{123})$$

Это условие может быть линеаризовано в предположении, что поправки окажутся малыми. При таком подходе мы конструируем $m = 1$ уравнений для $2n = 6$ переменных. В общем случае число измеренных углов m может быть большим, и система окажется переопределённой. Но мы можем рассматривать её в смысле метода наименьших квадратов, т.е. пытаться определить наименьшие поправки к координатам, которые делали бы их согласованными с измерениями. В рассмотренном примере можно найти решение

$$dr_1 = (dx_1, dy_1) = (0, h), \quad dr_2 = (-h, 0), \quad dr_3 = (h, -h), \quad \text{где } h = \pi/80 \approx 0.04$$

Ваша задача — написать код, который принимает текущие оценки координат точек ($n \times 2$) и измеренные углы θ_{ijk} (m значений и $m \times 3$ индексов). Возвращать он должен найденные поправки ($n \times 2$). Вы можете использовать пример из этого упражнения, чтобы протестировать свой код.

[1] L. N. Trefethen and D. Bau III, *Numerical linear algebra*, Vol. 50 (Siam, 1997).

[2] Е. Е. Тыртышников, *A brief introduction to numerical analysis* (Springer Science & Business Media, 2012).