

Двойное лучепреломление

Цель работы: изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления n_o — обыкновенной и n_e — необыкновенной волны в кристалле, наблюдение эффекта полного внутреннего отражения.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

При падении световой волны на границу изотропной среды в этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропная, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется двойным лучепреломлением. Оно было открыто Бартолином в 1669 г. в кристаллах исландского шпата, призма из которого исследуется в нашей работе.

Плоские волны в кристаллах. Фундаментальные уравнения Максвелла справедливы без всяких изменений и в кристаллических средах. В отсутствие электрических зарядов и токов они имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{B} = \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

Здесь ω - круговая частота, \vec{k} — волновой вектор, а амплитуды \vec{E}_0 , \vec{H}_0 , \vec{D}_0 постоянны. Вектор \vec{B}_0 совпадает с \vec{H}_0 , так как $\mu = 1$. В результате несложных вычислений (1) перейдут в

$$[\vec{k} \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}; \quad [\vec{k} \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{B}.$$

Введем единичный вектор нормали \vec{N} к фронту волны и скорости распространения фронта в направлении этой нормали v . Тогда $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{N}$ и предыдущие соотношения перейдут в

$$\vec{D} = -\frac{c}{v} [\vec{N} \vec{H}]; \quad \vec{B} = -\frac{c}{v} [\vec{N} \vec{E}] \quad (2)$$

Отсюда видно, что векторы \vec{D} , \vec{N} , \vec{H} взаимно перпендикулярны. Значит, плоские волны в кристалле поперечны в отношении векторов \vec{D} и \vec{H} .

Однако в общем случае они не поперечны в отношении вектора \vec{E} . В изотропной среде связь между вектором напряжённости электрического поля \vec{E} , и вектором индукции \vec{D} дается материальным уравнением $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, где ϵ — постоянная, не зависящая от направления величина, называемая диэлектрической проницаемостью. Для характеристики оптических свойств анизотропной среды требуется девять величин образующих тензор диэлектрической проницаемости. Благодаря тензорной связи между \vec{D} и \vec{E} направления этих векторов в кристаллах, вообще говоря, не совпадают. Плоскость (\vec{E}, \vec{H}) обладает тем свойством, что перпендикуляр к ней определяет направление вектора Пойнтинга \vec{S} , т.е. направление распространения световых лучей. Четыре вектора \vec{D} , \vec{E} , \vec{N} , \vec{S} лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору \vec{H} . Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1.

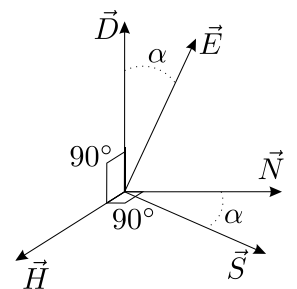


Рис. 1. Расположение векторов \vec{D} , \vec{E} , \vec{N} , \vec{S} в анизотропной среде

Оптически одноосные кристаллы. Вся совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипсоида. Значение диэлектрической проницаемости для любого направления выражается длиной радиуса-вектора эллипсоида, проведенного по этому направлению. Три значения диэлектрической проницаемости $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ соответствующие осям эллипсоида, называются и соответственно $\sqrt{\varepsilon_x}, \sqrt{\varepsilon_y}, \sqrt{\varepsilon_z}$ - главными показателями преломления.

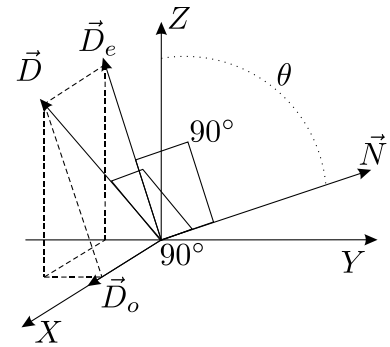


Рис. 2. Расположение векторов \vec{N} и \vec{D} в анизотропной среде:
 $(\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{D}_e; \vec{D}_o \perp \vec{D}_e; \vec{D} \perp \vec{N});$
 \vec{N} и \vec{D}_e лежат в плоскости (Z, Y) ; \vec{D}_o перпендикулярен плоскости (Z, Y)

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида, тензор диэлектрической проницаемости приводится к диагональному виду, и проекции векторов \vec{D} и \vec{E} на оси координат связаны простыми соотношениями:

$$\vec{D}_x = \varepsilon_x \vec{E}_x, \quad \vec{D}_y = \varepsilon_y \vec{E}_y, \quad \vec{D}_z = \varepsilon_z \vec{E}_z.$$

В оптически одноосном кристалле, каковым является исландский шпат, эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нем оптическая ось совпадает с осью вращения эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значений диэлектрических проницаемостей приняты обозначения:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{\parallel}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{\perp}.$$

В дальнейшем нам потребуется связь между проекциями векторов \vec{D} и \vec{E} на оптическую ось кристалла $(\vec{D}_{\parallel}, \vec{E}_{\parallel})$ и на плоскость, перпендикулярную оси $(\vec{D}_{\perp}, \vec{E}_{\perp})$:

$$\vec{D}_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{\perp} \quad (3)$$

Волну, распространяющуюся в одноосном кристалле, можно разделить на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции (\vec{D}_o) которой перпендикулярен главному сечению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции \vec{D}_e , лежащим в главном сечении (рис. 2).

Главным сечением кристалла называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкновенную волну, в которой вектор \vec{D}_o перпендикулярен главному сечению. Тогда $\vec{D}_{oz} = 0$, следовательно, $\vec{E}_{oz} = 0$.

Кроме того, так как $\vec{D}_{oy} = \varepsilon_y \vec{E}_{oy}$ и $\vec{D}_{oz} = \varepsilon_z \vec{E}_{oz}$ то можно записать

$$\vec{D}_o = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_o \quad (4)$$

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответствующий показатель преломления. Из (2) имеем

$$\vec{D}_o = \frac{c}{v_o} \vec{H}_o, \quad \vec{H}_o = \frac{c}{v_o} \vec{D}_o$$

учитывая (4), получим:

$$n_o = \frac{c}{v_o} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и ее показатель преломления не зависят от направления распространения. У необыкновенной волны вектор \vec{D}_e не параллелен \vec{E}_e , и связь между ними сложнее, чем в (4).

Для того чтобы найти скорость распространения v и показатель преломления необыкновенной волны, достаточно найти связь между вектором электрической индукции этой волны \vec{D}_e , и проекцией на него вектора электрического поля волны \vec{E}_{eD} . Тогда, подставляя $\vec{D}_{eD} = \epsilon_e \vec{E}_{eD}$ в (2), приходим к соотношениям

$$\epsilon \vec{E}_{eD} = \frac{c}{v} \vec{H}_e, \quad \vec{E}_e = \frac{c}{v} \vec{E}_{eD}$$

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Найдем связь между \vec{D}_e и \vec{E}_{eD} , - Для этого разложим векторы \vec{D}_e и \vec{E}_e на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

$$\vec{D}_e = \vec{D}_{e\parallel} + \vec{D}_{e\perp}, \quad \vec{E}_e = \vec{E}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp}.$$

Учитывая (4), находим

$$E_{eD} = \frac{\vec{E}_{e\parallel} \vec{D}_{e\parallel}}{D_e} = \frac{\vec{E}_{e\parallel} \vec{D}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp} \vec{D}_{e\perp}}{D_e} = \frac{D_{e\parallel}^2 / \epsilon_{\parallel} + D_{e\perp}^2 / \epsilon_{\perp}}{D_e}$$

или

$$E_{eD} = D_e \left(\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}} \right) = \frac{D_e}{\epsilon},$$

где θ – угол между оптической осью Z и волновой нормалью N (рис.2):

$$\sin \theta = \frac{D_{e\parallel}}{D_e}, \quad \cos \theta = \frac{D_{e\perp}}{D_e}. \quad (5)$$

Таким образом, ϵ и соответственно скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от угла между оптической осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны n через главные показатели преломления n_e, n_o и угол θ :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \quad (6)$$

При $n_o - n_e \ll n_o, n_e$ (6) можно упростить:

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta \quad (7)$$

Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата.

Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3).

В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор \vec{D}_o перпендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор \vec{D}_e параллелен верхней грани.

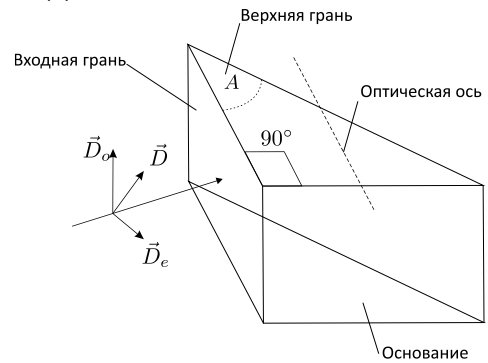


Рис. 3. Исследуемая призма из исландского шпата. Штриховкой указано направление оптической оси кристалла.

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор \vec{D} направлен вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса. Волна, в которой вектор \vec{D} направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы и угол γ_2 на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1, \quad \sin \varphi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(A - \beta_1).$$

Учитывая, что угол преломления β_1 связан с углом θ между осью кристалла и волновой нормалью \vec{N} соотношением $\beta_1 + \theta = \frac{\pi}{2}$, находим n и θ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \left\{ \sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \cos A \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad \cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n} \quad (8)$$

Для обыкновенной волны n не будет зависеть от угла θ , а для необыкновенной волны зависимость n от θ должна описываться выражением (6).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой минимален для симметричного хода лучей, т.е. когда $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\psi_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}, \quad (9)$$

где ψ_m — угол наименьшего отклонения.

Если призма не изотропная, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего

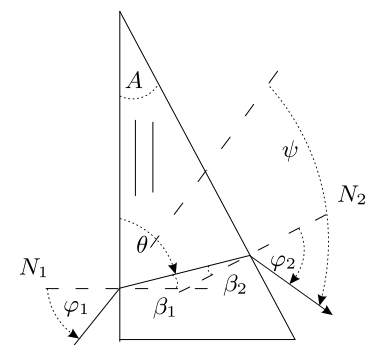


Рис. 4. Ход лучей в призме

отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла близким к $\frac{\pi}{2}$, то в качестве оценки формулу (9) можно использовать для определения n_e .

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА.

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 5. Источником излучения служит He-Ne лазер ($\lambda = 0,63$ мкм). Излучение лазера поляризовано линейно за счет наличия брюстерских окошек в кювете лазера. Направление вектора E в луче можно изменять с помощью поляроида, установленного на выходе лазера. Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчета углов.

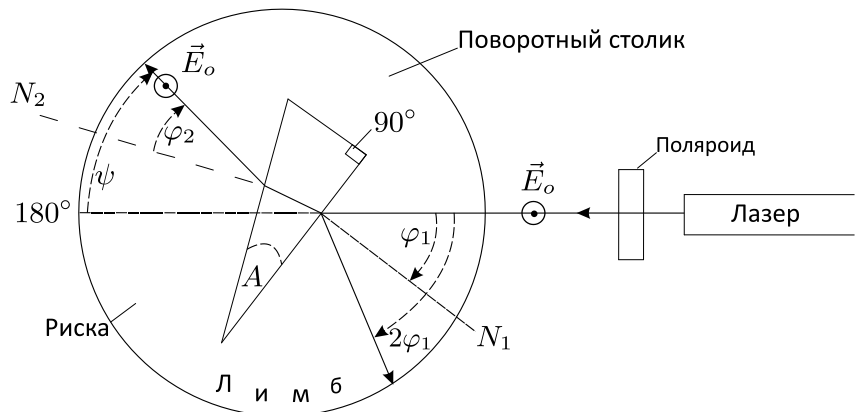


Рис. 5. Схема экспериментальной установки

Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчета углов.

Преломляющий угол A призмы (рис. 4) можно рассчитать, если известны угловые координаты нормалей N_1 и N_2 к преломляющим (рабочим) граням призмы, прилежащим преломляющему углу. Грань, противолежащая преломляющему углу, называется основанием призмы. Штриховкой указано направление оптической оси.

Обычно ход лучей в призме таков, что и падающий, и преломлённый лучи отклоняются от нормалей в сторону основания призмы, при этом углы φ_1 и φ_2 считаются положительными. Из рис. 4 можно получить

$$\varphi_2 = A + \psi - \varphi_1, \quad (10)$$

а угол ψ — отклонение преломлённого луча от первоначального направления — определяется по разности отсчётов на лимбе между точками, куда попадает луч в отсутствие призмы, и точкой, куда попадает преломлённый луч.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Ошибки отсчётов углов и показателей преломления. Равномерное распределение.

В лабораторной работе измеряются углы отражения луча лазера от большого катета α и углов отклонения ψ_o , ψ_e обыкновенной и необыкновенной волны. Зная эти углы, можно вычислить соответствующие показатели преломления. Формула для этих вычислений должна включать в себя только измеряемые величины и константы. Вместо выражения

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}, \quad \cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n}$$

φ_1 — угол падения на входную грань призмы,

φ_2 — угол на выходе из призмы,

A — преломляющий угол призмы,

θ — угол между осью кристалла и волновой нормалью).

Используя очевидные соотношения $\varphi_1 = \alpha/2$, $\varphi_2 = A - \frac{\alpha}{2} + \psi$ (угол ψ равен ψ_0 или ψ_e), выпишем рабочую формулу:

$$n(\psi, \alpha) = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(A - \frac{\alpha}{2} + \psi \right) + 2 \cos A \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{\alpha}{2} + \psi \right)} \quad (11)$$

По этой формуле программа обработки данных вычисляет зависимости показателей преломления $n(\psi_0, \alpha)$ и $n(\psi_e, \alpha)$ от угла падения.

Все углы в выражении (11) измеряются с ошибками. Мы будем считать, что ошибки σ_α отсчётов углов α , ψ_0 , ψ_e одинаковы, независимы между собой. Ошибка σ_α определяется точностью отсчёта угла. Расстояния между делениями в 1° составляет 2 мм. Не составляет труда определить координату лазерного пятна с ошибкой 1 мм, что соответствует $\sigma_\alpha \approx 0,5^\circ$. Ошибка σ преломляющего угла призмы A вычисляется программой при обработке данных соответствующего эксперимента. Обычно $\sigma \approx 0,2 \div 0,3^\circ$.

Используя сделанное предположение о некоррелированности ошибок измерений, выпишем обычное выражение для ошибки показателя преломления $\sigma_n(\psi, \alpha)$:

$$\sigma_n(\psi, \alpha) = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} \right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \psi} \right)^2 \sigma_\psi^2} \quad (12)$$

Ошибка значения преломляющего угла является систематической и поэтому будет учтена позднее, при конечном подсчете величин. Это следует сделать, так как эти ошибки зависимы и с ними нельзя работать, применяя обычную теорию. Ошибки показателя преломления слабо, но всё-таки зависят от угла падения $\frac{\alpha}{2}$ и отклонения ψ_0 и ψ_e . Обычно $\sigma_n \approx 0,01$. Также стоит отметить тот факт, что оборудование сборное, и при подсчете углов мы смотрим равномерно на всю шкалу, поэтому логично считать, что стандартное отклонение в данном случае – корень из дисперсии равномерного распределения, концы которого – границы деления. Например, если цена деления 1 градус, то ошибка будет равна 0,29 градуса. Конечно, речь идёт об ошибке показателя преломления для данного набора измеренных углов или ошибке отдельного измерения. На рис. 6 показана зависимость углов отклонения от угла φ_1 .

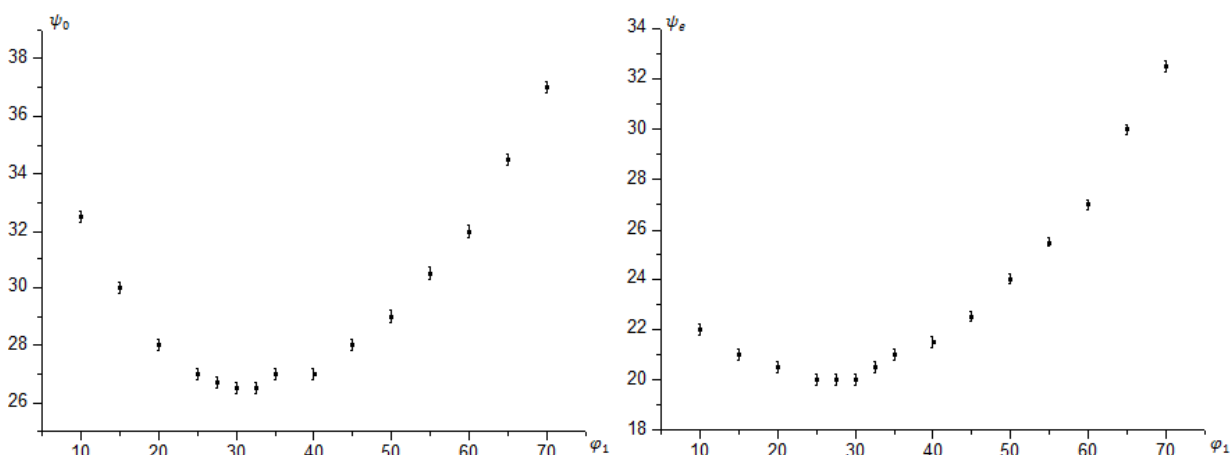


Рис. 6. Зависимости углов отклонения обыкновенной и необыкновенной волны от угла падения

Линейная регрессия.

Как было сказано ранее, ошибки можно считать по формуле (12), но делать это можно далеко не всегда.

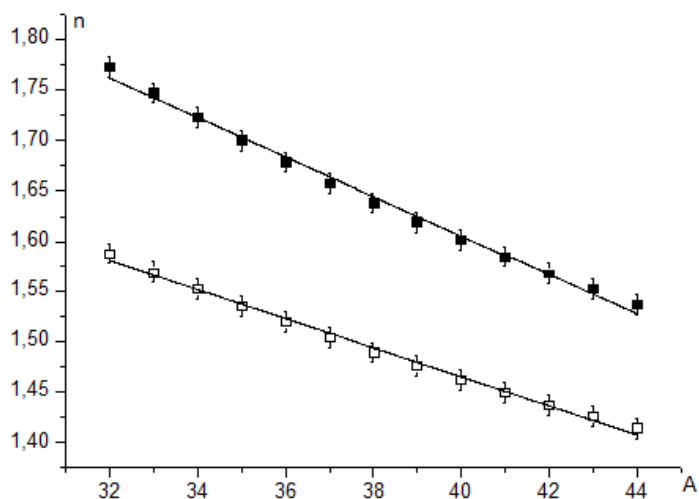


Рис. 7. Линейная регрессия n на A

Особое внимание представляет угол A, ошибка которого является систематической и которую было решено учитывать позже. На рис. 7 предоставлены зависимости коэффициентов преломления от угла A. Видно, что в рамках ошибок, прямая хорошо аппроксимирует экспериментальные данные. Коэффициенты регрессии равны -0.019 и -0.015. Использование формулы (12) для ошибки измерения угла A законно.

Гипотезы и экспериментальные данные.

Как уже отмечалось, теоретическая модель и следующие из неё формулы не учитывают все условия проведения опытов. С точки зрения экспериментатора всякая модель является рабочей гипотезой. Гипотеза будет опровергнута, если провести измерения с достаточной точностью. Можно поставить вопрос следующим образом: достаточно ли полученных данных для опровержения гипотезы? Ответ на этот вопрос желательно подтвердить каким-нибудь числом. Эта проблема формализуется и решается методом математической статистики. Статистическое описание и вероятностные модели применяются к результатам измерений (систематические ошибки игнорируются). Предположим, что мы провели очень много (ансамбль) серий измерений отсчётов углов преломления. Можно поставить вопрос: какова вероятность расхождения полученных данных и гипотезы. Эта вероятность и будет искомым числом. Если вероятность мала, то гипотеза считается опровергнутой.

χ^2 -распределение.

В качестве примера гипотезы рассмотрим утверждение: показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волны не зависят от угла поворота призмы, т.е. они постоянны. На рис.8 показаны вычисленные по формуле (11) показатели преломления с ошибками (12) и их наилучшие средние значения. Получившиеся средние показатели преломления, 1,648 для обыкновенной волны ($n_o = 1,655$) и 1,506 для необыкновенной волны ($n_e = 1,485$), неплохо согласуются с табличными значениями. Тем не менее, данные для n_e вызывают сомнения о справедливости сделанного утверждения.

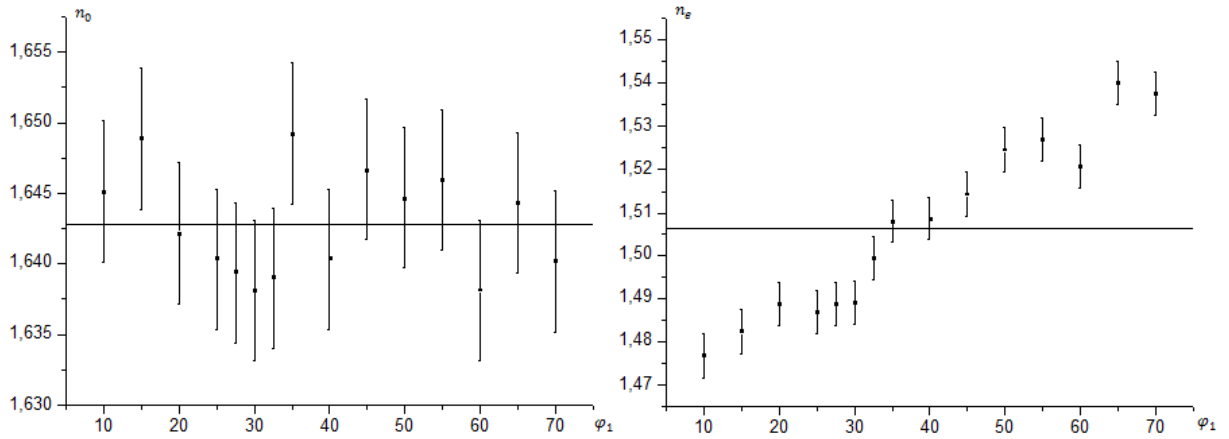


Рис. 8. Зависимости коэффициентов преломления от угла падения

В качестве меры отклонения теоретических значений некоторой величины \bar{y}_i от экспериментальной y_i мы выберем число

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \bar{y}_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (13)$$

Это число принято называть «хи-квадрат», а критерий оценки гипотезы - «критерий хи-квадрат». Теоретическое значение \bar{y} может являться функцией своих переменных. Например, эта функция может быть линейной $\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i$ (этот случай мы рассмотрим ниже) или более сложной (сплошные кривые, рис. 8). Число χ^2 является безразмерным, оно равняется сумме квадратов отклонения теоретических точек от экспериментальных, выраженных в единицах ошибок измерений σ_i . Для данных, приведённых на рис.7, χ^2 равняется 4 для n_0 и 46 для n_e . Что можно сказать о справедливости гипотезы, зная χ^2 ?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся методами теории вероятностей. Будем считать отклонение измеренных величин y от теоретических \bar{y} - случайными. Тогда каждое слагаемое в сумме (13) является случайным и само число χ^2 тоже является случайной величиной. Найдём функцию распределения значений χ^2 . Будем считать, что отклонения $y - \bar{y}_i$ имеют гауссовскую функцию распределения, т.е. вероятность того, что величина y_i попадает в интервал $y_i \div y_i + dy_i$ пропорциональна

$$e^{-\frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{2\sigma_i^2}} dy_i.$$

Конечно, сделанное предположение о функции распределения ошибок само требует проверки. Тем не менее, при малых отклонениях измеряемых величин (например, углов преломления) от их средних значений $(y_i - \bar{y}_i) \leq 2\sigma_i$ плавная гауссовская функция неплохо описывает вероятность отклонений. Для величины $y = (y_i - \bar{y}_i)/\sigma_i$ та же вероятность пропорциональна $e^{-y^2/2} dy$. Вероятность того, что одно слагаемое в сумме (Д3) попадёт в интервал X и $X + dX$ получается при замене $X = y^2 = (y_i - \bar{y}_i)^2/\sigma_i^2$, $dy = dX/2\sqrt{X}$ и она пропорциональна $\frac{e^{-X/2}}{\sqrt{X}} dX$.

Определим вероятность того, что сумма двух независимых между собой слагаемых в (Д.3) лежит в интервале X и $X + dX$. Первое слагаемое может принимать любое значение x из интервала $0 \leq x \leq X$, тогда второе равно $X - x$. Суммируя вероятности всех вариантов, получаем пропорциональность

$$\int_0^X \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{-(X-x)/2}}{\sqrt{X-x}} dx dX \sim e^{-X/2} dX.$$

Для трёх слагаемых функция распределения χ^2 пропорциональна $\sqrt{X}e^{-X/2}$. Для всей суммы она пропорциональна $X^{\frac{N-2}{2}}e^{-X/2}$.

Полученная нами форма функции распределения суммы (13) не учитывает того обстоятельства, что параметры теоретической зависимости могут подгоняться под экспериментальные данные. Пример априорной гипотезы, т.е. без варьируемых параметров, приведён на рис.6. Для показателей преломления, рис.8, мы выбираем наилучшее среднее значение. Если бы в сумме (13) было $N = 1$ слагаемое, то мы положили бы $\bar{y}_1 = y_1$ и получили $\chi^2 = 0$. Поэтому число независимых слагаемых (число степеней свободы χ^2 -распределения) равно $N-1$, для линейной зависимости $N - 2$ и т.д. Число степеней свободы m : число экспериментальных точек минус число свободных параметров гипотезы. Выпишем нормированную функцию плотности вероятности χ^2 -распределения:

$$W(X, m) = \frac{X^{\frac{m-2}{2}} e^{-X/2}}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})}, \quad \int_0^{\infty} W(X, m) dX = 1, \quad (14)$$

где $\Gamma(\frac{m}{2})$ - гамма-функция ($\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n + 1) = n!$).

На рис.8 приведены примеры графиков χ^2 -распределений. Наиболее вероятное значение χ^2 равно $m-2$. Вычислим некоторые характеристики случайного набора чисел χ^2 . Среднее значение и средний квадрат

$$\langle \chi^2 \rangle = \int_0^{\infty} X W(X, m) dX = m$$

$$\langle (\chi^2)^2 \rangle = \int_0^{\infty} X^2 W(X, m) dx = m(m + 2).$$

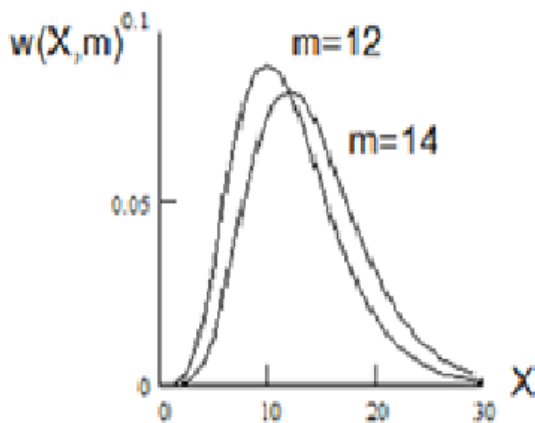


Рис. 9. Распределение хи-квадрат для 12 и 14 степеней свободы

Среднеквадратическое отклонение чисел χ^2 от их среднего значения

$$\sigma_{\chi^2} = [\langle (\chi^2)^2 \rangle - \langle \chi^2 \rangle^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2m}.$$

Проведённый статистический анализ сумм χ^2 позволяет сделать качественный вывод, что стандартные значения χ^2 должны располагаться в интервале $m \pm \sqrt{2m}$. Например, для данных на рис.8 $m=13$ и следует ожидать $\chi^2 13 \pm 5$. Если $\chi^2 < m - \sqrt{2m}$, для показателя преломления обыкновенной волны было получено $\chi^2 = 4$, то скорее всего были завышены ошибки измерений. Следует более точно измерить углы отражения и преломления, например, используя гониометр. Если полученное значение χ^2 заметно больше $m \pm \sqrt{2m}$, то или были занижены ошибки измерений, или гипотеза не верна, и в следующую гипотезу следует ввести новые параметры.

При оценке вероятности P отклонения экспериментальных данных от теоретической гипотезы полученное значение χ^2 считается минимальным, т.е. $P(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{\infty} W(X, m) dX$.

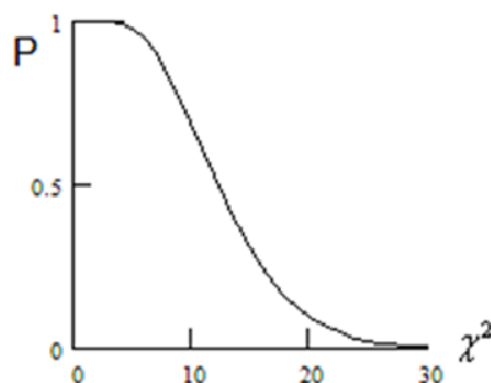


Рис. 9. Зависимость вероятности реализации гипотезы от величины хи-квадрат

На рис.10 приведён график $P(\chi^2)$ для $m=13$ степеней свободы. Вероятность P довольно быстро стремится к нулю при превышении χ^2 среднего значения m на величину дисперсии $\sqrt{2m}$. Принято считать гипотезу опровергнутой, если вероятность P меньше 5%. Это событие возникает, если значение χ^2 превышает $m + 2\sqrt{2m}$, т.е. отличается от среднего значения более, чем на удвоенную величину стандартного отклонения. Таким образом, мы получили простое правило опровержения гипотезы:

$$\chi^2 > m + 2\sqrt{2m}, \quad P < 0,05. \quad (15)$$

Если правило (15) не выполняется, то говорят, что экспериментальных данных недостаточно для опровержения гипотезы.

Приведённые на рис.8 экспериментальные данные и соответствующие гипотезы ($m=14$, априорная гипотеза) характеризуется $\chi^2=60$, правило (15) выполняется, и измеренные углы преломления не соответствуют формулам, приведённым в описании. При исключении систематической ошибки, связанной с настройкой установки, имеем $\chi^2 = 6$. Правило (15) выполняется для показателя преломления необыкновенной волны n_e (рис.8, $m=13$, $\chi^2=46$), и гипотезу о независимости показателя преломления необыкновенной волны от угла поворота призмы придётся отвергнуть. Ту же гипотезу для показателя преломления обыкновенной волны (по рис.8, $m=13$, $\chi^2=4$) следует сохранить и продолжить по ней расчёты: определить наилучшее значение n_0 и его ошибку.

Параметры гипотезы.

При обработке экспериментальных данных лабораторных работ, для которых гипотезой является линейная функция, рекомендуется отметить на графике измеренные значения и их ошибки. Далее следует на глаз провести наилучшую прямую. Чем меньше ошибка измерений, тем ближе прямая должна подходить к экспериментальной точке. Для двух ошибок, условно по осям x и y , нужно оставить для расчётов ту, которая даёт минимальное относительное расстояние от экспериментальной точки до прямой (минимум значения χ^2). Эту ошибку следует отложить по оси ординат. Для упрощения расчётов, которое мало меняет результат, ошибку по оси абсцисс можно считать равной нулю. На следующем шаге следует проверить правило (15) и принять решение о прекращении дальнейших вычислений (гипотеза опровергнута) или уточнить значения параметров гипотезы и их ошибки. Как показывает практика, по аккуратно проведённой прямой можно получить вполне удовлетворительные оценки параметров гипотезы.

Среднее значение \bar{y} показателя преломления обыкновенной волны (см.рис.8) определяем из условия минимума величины χ^2 . Используя (7) и полагая $\partial \chi^2 / \partial \bar{y} = 0$, получаем

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (16)$$

Чем меньше ошибки измерений, тем с большим весом данная точка входит в окончательный результат. Для примерно одинаковых ошибок, как и следовало ожидать.,

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Ошибка среднего значения

$$\sigma_{\bar{y}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \quad (17)$$

Для примерно равных ошибок измерений $\sigma_{\bar{y}} = \sigma/\sqrt{N}$ и, если число экспериментальных точек невелико, то лучше использовать оценку $\sigma_{\bar{y}} = \sigma/\sqrt{N-1}$. Обработка данных, показанных на рис.8, привела к результату $n_o \approx 1,655 \pm 0,03$. Рассчитаем параметры гипотезы для прямой на примере зависимости показателя преломления необыкновенной волны от угла поворота призмы $\alpha/2$ или угла θ между волновым вектором и оптической осью кристалла. Из формулы (1) следует, что

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} = \frac{1}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right)\cos^2\theta = \frac{1}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right)\frac{\sin^2\alpha/2}{n^2(\theta)} \quad (18)$$

— это наша новая гипотеза (см. рис.11). Опишем процедуру оценки параметров гипотезы и их ошибок, принятую в программе обработки данных.

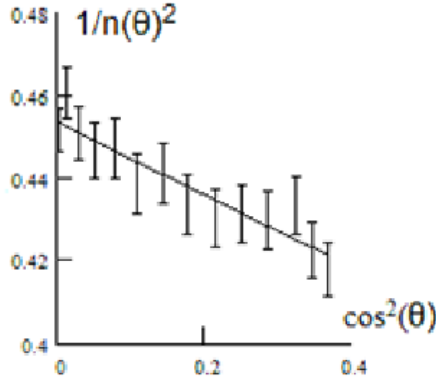


Рис. 11. Линейная аппроксимация зависимости показателя преломления необыкновенной волны от угла θ

Опишем процедуру оценки параметров гипотезы и их ошибок, принятую в программе обработки данных.

Введём две функции $f_0(\alpha) = 1$ и $f_1(\alpha) = (\sin^2\alpha/2)/n^2(\theta)$, которые для имеющихся углов поворота призмы $\alpha_i/2$ имеют значения $f_{0i} = 1$ и $f_{1i} = \sin^2\frac{\alpha_i}{2}/n_{ei}^2$. Обозначим через a_0 и a_1 параметры гипотезы, измеренная величина $y_i = \frac{1}{n^2(\theta_i)}$, её ошибка $\sigma_{yi} = \frac{2 \cdot \sigma_{n(\theta_i)}}{n^3(\theta_i)}$ и перепишем выражение (13)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - a_0 f_{0i} - a_1 f_{1i}}{\sigma_{yi}} \right)^2.$$

Искомые параметры гипотезы должны обеспечивать минимум χ^2 (максимум вероятности реализации гипотезы), т.е. $\partial \chi^2 / \partial a_0 = \partial \chi^2 / \partial a_1 = 0$, что приведёт к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^N \frac{f_{0i}^2}{\sigma_{yi}^2} + a_1 \sum_{i=1}^N \frac{f_{0i} \cdot f_{1i}}{\sigma_{yi}^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{y_i f_{0i}}{\sigma_{yi}^2}, \\ a_0 \sum_{i=1}^N \frac{f_{0i} f_{1i}}{\sigma_{yi}^2} + a_1 \sum_{i=1}^N \frac{f_{1i}^2}{\sigma_{yi}^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{y_i f_{1i}}{\sigma_{yi}^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Целесообразно систему уравнений (17) представить в матричной форме. Пусть a_n - вектор параметров гипотезы, b_n - вектор правых частей системы (17), $A_{nm}(n, m = 0, 1)$ - матрица коэффициентов в левой части:

$$A_{nm} = \sum_{i=1}^N \frac{f_{ni} f_{mi}}{\sigma_{yi}^2}.$$

Система уравнений (17) имеет запись $Aa=b$, и решение $a=B \cdot b$, где $B=A^{-1}$ - матрица, обратная A . Ошибки параметров гипотезы зависят от ошибок полученных значений показателя преломления необыкновенной волны n_{ei} , которые в свою очередь, определяются ошибками измерения отсчётов углов падения и преломления в данной точке. Ошибки отсчёта углов или показателя преломления независимы в различных точках. В этом случае элементы матрицы B_{nm} имеют смысл коэффициентов корреляции случайных отклонений параметров гипотезы от их средних значений:

$$\langle (a_n - \bar{a}_n)(a_m - \bar{a}_m) \rangle = B_{nm}.$$

Ошибка параметров a_0 и a_1 равны

$$\sigma_0 = \sqrt{B_{00}} \text{ и } \sigma_1 = \sqrt{B_{11}}. \quad (20)$$

Из σ_0 можно получить ошибку для n_e :

$$\sigma_{n_e} = \frac{n_e^3}{2} \sigma_0. \quad (21)$$

После этого необходимо добавить ошибку угла A :

$$\sigma_{n_e} = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_A^2 \left(\frac{\partial n}{\partial A}\right)^2}. \quad (22)$$

Принцип работы программы и задание для студента

Ввод данных

В соответствующие таблицы вводятся данные, полученные из эксперимента.

Проверка юстировки

Оптимальный наклон и подъем прямой для обыкновенной волны ищется по сходным с (17) - (19) формулами, но используется немного другая гипотеза

$$n_o(\theta) = b + k \cos^2 \theta = b + k \frac{\sin^2 \alpha/2}{n_o^2(\theta)}. \quad (23)$$

В этом случае принимая b за a_0 , k за a_1 расчет можно вести по формуле (19).

По полученным результатам считается хи-квадрат. Если он очень маленький, то выводится сообщение о завышенных ошибках. Выводится значение хи-квадрат и значение коэффициента преломления обыкновенной волны. Рисуется график, где указаны: экспериментальные точки, ошибки. Также считается средневзвешенное значение коэффициента преломления и строится соответствующая прямая. Студенту предоставляется возможность изменять параметры схемы таким образом, чтобы хи-квадрат стал минимальным, а прямые похожими. После этого следует сравнить оптимизированные параметры. Если разность между углами A получается больше одного градуса, то следует отъюстировать систему заново. Далее из статистики следует, что при обработке данных при помощи метода "Хи-квадрат", можно получать ошибки. Если изменить угол A таким настолько, чтобы Хи-квадрат изменился на единицу, то полученная разница и будет ошибкой измерения угла A . Студенту предлагается сделать это самостоятельно. Так как для гауссовского распределения ошибок график зависимости хи-квадрат от параметра – парабола, то можно по нескольким точкам построить график зависимости хи-квадрат от угла A и убедиться в этом.

Подсчет коэффициента преломления необыкновенной волны

При помощи формул (17) - (19) производится подсчет коэффициента преломления необыкновенной волны и его ошибка. Выводится его значение и ошибка, данная методом. Строится прямая по формуле (7). Далее студенту требуется вычислить итоговую ошибку коэффициента преломления необыкновенной волны по формуле (22). Так как регрессия линейная, то можно заменить частную производную на коэффициент регрессии.